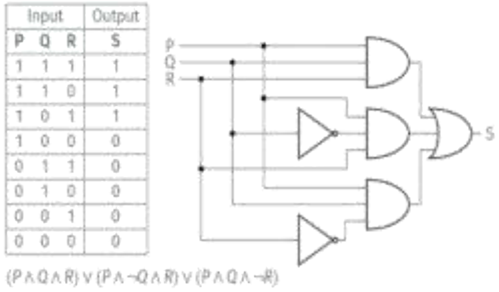
University of BOUIRA
Faculty of sciences
Department of Informatics

Module **Logique Mathematique** 2ème Année Licence

Cours 9

Logique des prédicats



Sémantique

BY : BENAISSI Sellami
s.benaissi@gmail.com

OCT 2022

Part 1

logique des prédicats

Sémantique

SÉMANTIQUE DE LOGIQUES DES PRÉDICATS

Formule bien formée + Interprétation + Valuation

=

Valeur de Vérité

INTERPRÉTATION

Interprétation:

- Une interprétation I est constituée de:
  - un ensemble non-vide D appelé domaine d'individus.
  - une relation pour chaque symbole de prédicat P. $I_P : D^n \longrightarrow \{0,1\}$
  - une opération pour chaque symbole de fonction f. $I_f : D^n \longrightarrow D$
  - un élément pour chaque symbole de constante a_i. $I_a : d_i \in D$

INTERPRÉTATION

Exemple:

- Soit la formule $F= P\ (f(x, y), y)$
- On peut présenter deux interprétations pour cette formule:

- $D=\mathbb{Z}$ (ensemble des nombres entiers),
- $f(x, y)=x - y$,
- $P\ (x, y)=$ « $x\ >\ y$ »

- $D=\mathbb{R}$ (ensemble des nombres réels),
- $f(x, y)=(x^2 - y)/2$,
- $P\ (x, y)=$ « $x\ =\ y$ »

INTERPRÉTATION

Valuation:

- Une valuation est une fonction qui assigne à chaque variable un élément de D.
- La valuation d'une formule dépend de la valuation des composants de la formules: formules atomique, connecteurs logiques, et les qualificateurs.

INTERPRÉTATION

Formule vraie:

- Une formule A est vraie pour une interprétation I si $v(A)$ = 1 (vraie) dans I.

Formule fausse:

- Une formule A est fausse pour une interprétation I si $v(A)$ = 0 (fausse) dans I.

INTERPRÉTATION

Valuation (suite):

Formule: $F = P\ (f(x,y), y)$

Interprétation: $D=\mathbb{N},\ \ f(x,y)=x-y,\ \ P\ (x,y)=$ « $x\ >\ y$ »

Valuation:

- V(x) = 8 et V(y)= 2 alors la valeur de vérité de F est: Vraie
- V(x) = 3 et V(y)= 2 alors la valeur de vérité de F est: fausse

INTERPRÉTATION

Remarque importante:

- **$\forall$x (P)** vrai ***ssi*** P est **vraie** pour toute interprétation I(x).
- Pour prouver qu'une proposition de forme $\exists x\ P(x)$ est vraie, il suffit de vérifier la proposition pour un élément.
- Pour prouver que une proposition de forme $\forall x\ P(x)$ est fausse, il suffit de vérifier d'un contre-exemple.

INTERPRÉTATION

Exemples:

- Soient la proposition $\exists x\ P(x)$ et l'interprétation, D=ℕ et $P(x) =$ « $x > 5$».
  - Si on suppose **x= 7** alors $\exists x\ P(x)$ est **vraie**. Alors la formule est **vraie**,
- Soient la proposition $\forall x\ P(x)$ et l'interprétation, D=ℕ et $P(x) =$ « $x > 5$».
  - On a un contre-exemple, **x=2.** la formule est **fausse**,

VALIDITÉ ET SATISFIABILITÉ

Formule satisfiable:

- Une formule **A** est dite satisfaite s'il existe une interprétation I et une valuation v (avec assignement les variables libres) t.q. A est vraie dans I et v.
- On note $I \vDash A_v$.

VALIDITÉ ET SATISFIABILITÉ

Formule satisfiable (suite):

Exemple: soit la formule $F = P\,(f\,(x, y), y)$

- **Interprétation**: $D = \mathbb{N}$, $f\,(x, y) = x - y$, $P\,(x, y) =$ « $x > y$ »
- Pour $V(x) = 5$ et $V(y) = 2$ alors $v(F) = P(f(5,2),2)$. $v(F)$ est **vraie**.
  Cette valuation satisfait F pour I ($I \models A_v$).
- Pour $V(x) = 5$ et $V(y) = 4$ alors $v(F) = P(f(5,4),4)$. $v(F)$ est **fausse**.
  Cette valuation ne satisfait pas F pour I ($I \not\models Av$).
- La formule F est satisfiable.

VALIDITÉ ET SATISFIABILITÉ

Formule insatisfiable:

- Une formule A est dite insatisfaite si sa valeur de vérité est fausse pour toute interprétation et toute valuation.

Exemple:

$$F = \exists x\ (P(x,y) \wedge \neg P(x,y))$$

F est une formule insatisfiable.

VALIDITÉ ET SATISFIABILITÉ

Formule valide:

- La formule A est valide si sa valeur de vérité est vraie pour toute interprétation et toute valuation.
- On note $\models$ A signifie A est vraie dans toute I et quelque soit la valuation.
- Il existe plusieurs techniques pour vérifier qu'une formule est valide ou non:
  - analyse tous les cas possibles,
  - par l'absurde,
  - trouver un contre-exemple.

VALIDITÉ ET SATISFIABILITÉ

Formule valide (suite):

Exemple:

Montrer que $F = \forall x \, \forall y \, ((x \neq y) \lor P(x,y) \lor \neg P(y,x))$ est valide.

- On a deux cas possibles quelque soit l'interprétation I considérée:
  - **x =y:** $P(x,y) \lor \neg P(y,x) = P(x,x) \lor \neg P(x,x)$ est toujours vraie.
  - **x ≠ y**: est vraie à cause la première prédicat $(x \neq y)$ est vraie.
- Donc F est valide ($\vDash$ F).

FORME NORMALE PRÉNEXE

Définition:

Une formule F est dite en forme prénexe ssi elle est de la forme:

$$Q_1 x_1 \; \dots \; Q_n x_n \, A',$$

- Q_i est un quantificateur ∀ ou ∃
- A' formule ne contient pas des quantificateurs.

Théorème:

Pour toute formule A il existe une formule A' en forme prénexe t.q:

$A \equiv A'$.

FORME NORMALE PRÉNEXE

Algorithme:

1. Renommer les variables pour éviter les conflits.
2. Élimination des implications et des équivalences.
3. Mettre les quantificateur en tête de la formule.

FORME NORMALE PRÉNEXE

1. Renommer les variables pour éviter les conflits.

On renomme les variables dans les cas suivantes:

- Variables liées de portées différentes.
- Conflit variable libre et liée
- Variable dépendant de plusieurs portées.

Exemples:

- $\forall x\ (\exists y\ P(x,y) \wedge \exists x\ Q(x,A)\ )$ Aprés: $\forall x\ (\exists y\ P(x,y) \wedge \exists z\ Q(z,A)\ )$
- $\forall x\ (\exists y\ P(x,y) \wedge M(x,y)\ )$ Aprés: $\forall x\ (\exists y\ P(x,y) \wedge M(x,z)\ )$
- $\forall x\ \forall z\ (\exists y\ P(x,y) \wedge \exists y\ Q(z,y)\ )$ Aprés: $\forall x\ \forall z\ (\exists y\ P(x,y) \wedge \exists w\ Q(z,w)\ )$

FORME NORMALE PRÉNEXE

2. Eliminer les implications et les équivalences

Comme en logique propositionnelle :

- $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
- $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$

Dans cette étape, on peut réduire la négation de façon:

- $\neg \forall x\ P \equiv \exists x\ \neg P$
- $\neg \exists x\ P \equiv \forall x\ \neg P$
- $\neg (\neg P) \equiv P$
- $\neg (P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
- $\neg (P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

FORME NORMALE PRÉNEXE

3. Mettre les quantificateurs en tête de la formule

Pour cela on utilise les équivalences suivantes :

- $(\forall x\ A) \vee B \equiv \forall x\ (A \vee B)$ ssi x n'est pas liée dans B
- $(\exists x\ A) \vee B \equiv \exists x\ (A \vee B)$ ssi x n'est pas liée dans B
- $(\forall x\ A) \wedge B \equiv \forall x\ (A \wedge B)$ ssi x n'est pas liée dans B
- $(\exists x\ A) \wedge B \equiv \exists x\ (A \wedge B)$ ssi x n'est pas liée dans B

FORME NORMALE PRÉNEXE

Exemple 1: $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists\, xQ(x))$

1. Renommer les variables pour éviter les conflits:

- $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists\, yQ(y))$

2. Eliminer les implications et les équivalences:

- $\forall x(\neg P(x) \vee \exists\, yQ(y))$

3. Mettre les quantificateurs en tête de la formule:

- $\forall x \exists\, y\, (\neg P(x) \vee Q(y))$ FNP

FORME NORMALE SKOLEM

La skolémisation s'agit de remplacer les variables quantifiées existentiellement.

- par une constante si la variable est dans la portée d'aucune autre quantification universelle.
- par une fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ où les x_i sont les variables quantifiées universellement précédant la variable quantifiées existentiellement. (f est appelé fonction de Skolem).

FORME NORMALE SKOLEM

Exemples 1:

$\exists x \forall y\, A(x,y)$ devient $\forall y\, A(B,y)$ (remplacer x par la constante B).

$\forall y \exists x A(x,y)$ devient $\forall y A(f(y),y)$ (remplacer x par la fonction f(y)).

$\forall y\ \forall z\ \exists\ x A(x,y)$ devient $\forall y A(f(y,z),y)$ (remplacer x par la fonction f(y,z)).

FORME NORMALE CONJONCTIVE

- La formule est écrite en FN Skolem
- Distribution de $\vee$ sur $\wedge$

Comme pour la logique des propositions :

- $(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

$(A(f(x)) \wedge \neg M(x,f(x))) \vee M(g(x),x)$

La formule est en FNC:

$(A(f(x)) \vee M(g(x),x)) \wedge (\neg M(x,f(x)) \vee M(g(x),x))$

FORME NORMALE CONJECTIVE

Exercice :

Mettre la formule suivante sous forme normale conjective

$$\forall x(\forall y\ (P(y) \Rightarrow Q(x,y))) \Rightarrow (\exists y\ Q(y,x))$$

1. Renommer les variables pour éviter les conflits.

$$\forall x(\forall y\ (P(y) \Rightarrow \neg\ Q(x,y))) \Rightarrow (\exists y\ Q(y,x))$$

$$\forall x(\forall y\ (P(y) \Rightarrow \neg\ Q(x,y))) \Rightarrow (\exists z\ Q(z,x))$$

FORME NORMALE PRÉNEXE

2. Elimination des implications et des équivalences

$\forall x\ (\forall y\ (P(y) \Rightarrow Q(x,y))) \Rightarrow (\exists z Q(z,x))$

$\forall x\ (\forall y(\neg P(y) \vee Q(x,y))) \Rightarrow (\exists z Q(z,x))$

$\forall x\ (\neg\ (\forall y(\neg P(y) \vee Q(x,y))) \vee (\exists z\ Q(z,x))$

$\forall x\ (\exists y \neg (\neg P(y) \vee Q(x,y))) \vee (\exists z\ Q(z,x))$

$\forall x\ (\exists y\ (P(y) \wedge \neg Q(x,y))) \vee (\exists z\ Q(z,x))$

FORME NORMALE PRÉNEXE

3. Mettre les quantificateurs en tête de la formule en respectant leur ordre

$\forall x(\exists y\ (P\ (y) \land \neg\ Q(x,y)))\ \lor(\exists z\ Q(z,x))$

$\forall x \exists y \exists z\ ((P(y) \land \neg\ Q(x,y))\ \lor\ Q(z,x))$

La forme normale prénexe de la formule:

$\forall x(\forall y\ (P(y) \Rightarrow Q(x,y))) \Rightarrow (\exists y\ Q(y,x))$

est: $\forall x \exists y \exists z\ ((P(y) \land \neg\ Q(x,y)) \lor Q(z,x))$

FORME NORMALE CONJONCTIVE

4. Skolémisation

$\forall x \exists y \exists z\ ((P(y) \wedge \neg\ Q(x,y)) \vee Q(z,x))$

$\forall x \exists z\ ((P(f(x)) \wedge \neg\ Q(x, f(x))) \vee Q(z,x))$

$\forall x \exists z\ ((P(f(x)) \wedge \neg\ Q(x, f(x))) \vee Q(z,x))$

$\forall x\ ((P(f(x)) \wedge \neg\ Q(x, f(x))) \vee Q(g(x),x))$ FN Skolem

5. Suppression des quantificateurs universels

$(P(f(x)) \wedge \neg\ Q(x, f(x)) \vee Q(g(x),x)$

Comme toutes les variables sont maintenant universellement quantifiées on peut supprimer les $\forall$ (ils deviennent implicites).

FORME NORMALE CONJONCTIVE

6. Distribution de ∨ sur ∧:

$(P(f(x)) \wedge \neg Q(x, f(x)) \vee Q(g(x),x)$

La formule est en FNC:

$(P(f(x)) \vee Q(g(x),x)) \wedge (\neg Q(x,f(x)) \vee Q(g(x),x))$

Thank you